

**COMBINATORIA ENUMERATIVA Y TEORÍA DE GRAFOS
PARA PRINCIPIANTES
NOTAS DE CLASE**

RAFAEL S. GONZÁLEZ D'LEÓN AND LUISA FERNANDA MOSQUERA LÓPEZ

ÍNDICE

1. ¿Qué es la combinatoria?	1
1.1. ¿Cuál es una buena respuesta a esta pregunta?	2
1.2. Un nuevo enfoque	3
1.3. ¿Podemos obtener una mejor respuesta?	4
1.4. Conclusiones	5
2. Principios básicos de conteo	5
2.1. Principio de la multiplicación	6
2.2. Principio de la suma	6
2.3. Subconjuntos	8
2.4. Teorema del Binomio	11
3. Selecciones con repeticiones y composiciones	14
4. Un teorema de inversión matricial	18

1. ¿QUÉ ES LA COMBINATORIA?

De una manera simple la **combinatoria** es el área de las matemáticas encargada de enumerar o contar familias de objetos matemáticos. En algunos casos muchas de estas familias de objetos cuentan con cierta estructura adicional que puede ser usada en su enumeración. La combinatoria entonces también se encarga de la estructura de los objetos que pueden ser contados (con los números naturales $0,1,2,3,\dots$). Esta área es también a veces conocida como **Matemática Discreta**.

Date: 7 de febrero de 2018.

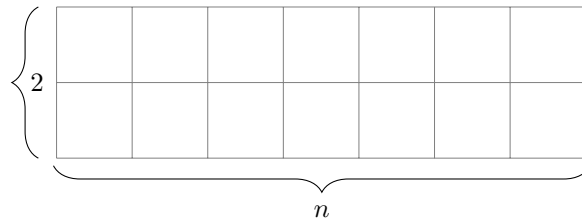


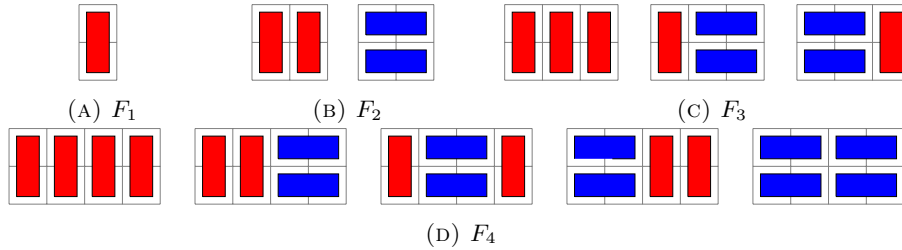
FIGURA 1. El tablero P_n



FIGURA 2. Ficha horizontal



FIGURA 3. Ficha vertical

FIGURA 4. Conjuntos F_n para $n = 1, 2, 3, 4$

Ejemplo 1.1. Sea P_n el tablero de dimensiones $2 \times n$ de la Figura 1. Queremos saber de cuantas maneras posibles podemos teselar el tablero usando fichas de dominó, las cuales son tableros de tamaño 1×2 o 2×1 (como se muestra en las Figuras 2 y 3 respectivamente). Llamemos F_n al conjunto de teselaciones diferentes de P_n con fichas de dominó y denotemos $f_n = |F_n|$, la cardinalidad de este conjunto. Queremos entonces contestar la siguiente pregunta.

Pregunta 1.2. Dada una familia de conjuntos F_0, F_1, F_2, \dots , ¿podemos determinar la cardinalidad de F_n “simultáneamente” para todo n ?

1.1. ¿Cuál es una buena respuesta a esta pregunta? Un primer acercamiento podría darse al construir todos los objetos de la familia. Por ejemplo para los valores $n = 1, 2, 3, 4$ los conjuntos F_n aparecen en la Figura 4.

Observación 1.3. El caso $n = 0$ frecuentemente es materia de discusión y en muchos casos se define por convención para tomar un valor que tenga sentido teniendo en cuenta otras propiedades de la familia estudiada. En nuestro caso podría ser 0 porque no hay objetos para contar pero también podría ser 1 porque hay un objeto a contar, “la teselación vacía” del tablero vacío.

El proceso de listar todos los elementos en cada conjunto de la familia es dispendioso y en la mayoría de los casos imposible de completar. En ese caso, tal vez nos gustaría tener una fórmula explícita que determine el número f_n para cada n que evaluemos. Por ejemplo, el número s_n de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n , entonces $s_n = 2^n$. Esta es una fórmula muy bonita y útil. Vemos por ejemplo que los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ son: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$ que corresponde con $s_3 = 2^3 = 8$, así que esta fórmula funciona!. Una fórmula de este tipo se conoce como una **fórmula cerrada**.

Esto se ve bien pero ¿Será que existe una fórmula cerrada para f_n ?, véamos. Si en una teselación consideramos una pareja de dominós ubicados horizontalmente uno

sobre el otro como un objeto en sí mismo (llamemos a esto un **par horizontal**) y si sabemos que hay k de estos pares horizontales, entonces deben haber $n - 2k$ dominós ubicados verticalmente. Entonces en total tendríamos $n - 2k + k = n - k$ objetos para ser organizados en un arreglo lineal de los cuales k son las pares horizontales. Existen 9

$$\binom{n-k}{k} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}$$

maneras de organizar estos objetos (lo cuál demostraremos más adelante). Cómo el valor de k puede variar de 0 a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ tenemos entonces que

$$(1) \quad f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Esta es una fórmula cerrada. Tal vez no es tan satisfactoria como 2^n pero puede ser usada para determinar los valores de f_n para cualquier n . Por ejemplo si $n = 4$ tenemos:

$$f_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Sin embargo si quisieramos usar ésta fórmula para $n = 100$ tendríamos

$$f_{100} = \binom{100}{0} + \binom{99}{1} + \binom{98}{2} + \cdots,$$

que ya no estaríamos tan dispuestos a calcular.

1.2. Un nuevo enfoque. Miremos ahora lo que pasa en la esquina izquierda al principio del tablero. Aquí tendremos ya sea un par horizontal o un solo dominó vertical (ver Figura 4). En el primer caso existen exactamente f_{n-2} teselaciones de este tipo ya que cualquier teselación en F_{n-2} se puede extender a una en F_n agregando al principio un par horizontal. Bajo el mismo tipo de razonamiento, sabemos que existen f_{n-1} teselaciones que comienzan con un dominó vertical. Como no existe ninguna teselación que sea de los dos tipos simultáneamente, entonces tenemos que para $n \geq 3$

$$(2) \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

A esto lo llamamos una **relación de recurrencia!**

Ahora podemos usar la fórmula (2) para evaluar f_n mucho más rapido que con la fórmula cerrada (1). Nótese que usando la ecuación (2) tenemos que hacer solamente $n - 2$ adiciones pero para usar (1) tenemos que primero calcular $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ coeficientes binomiales y luego hacer $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ adiciones. Por ejemplo para los primeros valores de n tenemos

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_3 &= f_2 + f_1 = 3 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 5. \end{aligned}$$

Observación 1.4. La fórmula recursiva (2) también nos da una idea sobre cual debería ser el valor de f_0 . Esto ya que si queremos extender la recurrencia para $n = 2$ tenemos que $2 = f_2 = f_1 + f_0 = 1 + f_0$ y entonces $f_0 = 1$.

Continuando con la fórmula (2) obtenemos la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, Ésta sucesión es famosamente conocida como la sucesión de **Fibonacci**.

1.3. ¿Podemos obtener una mejor respuesta? En lo siguiente aplicaremos el siguiente truco algebraico. Usaremos una serie de potencias para “colgar” los valores de f_n en las potencias x^n de la variable x . Así tenemos

$$(3) \quad \begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots \\ &= 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \end{aligned}$$

La serie de potencias (3) la llamaremos **función generatriz**. Haciendo un poco de manipulación algebraica tenemos

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\ \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n &= x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} \\ F(x) - f_1x - f_0 &= x(F(x) - f_0) + x^2F(x) \\ F(x)(1 - x - x^2) &= 1 \\ (4) \quad F(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

Obteniendo una “fórmula” para la función generatriz $F(x)$.

Observación 1.5. En este paso nos puede preocupar un poco sobre a que nos referimos cuando decimos que $F(x)$ y $\frac{1}{1-x-x^2}$ son iguales. Claramente no son iguales cómo funciones sobre los números reales \mathbb{R} , ya que si hacemos algo como $x = 1$ tenemos que $F(1)$ es una serie divergente pero $\frac{1}{1-(-1)-(-1)^2} = -1$. Realmente lo que estamos diciendo es que $F(x)$ y $1 - x - x^2$ son un par de series inversas en el anillo de las series formales. Esto lo aclararemos más adelante.

¿Cómo hacemos ahora para obtener los valores de f_n de vuelta usando la ecuación (2)? Podemos usar las herramientas del cálculo para esto. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_0 &= F(0) = 1 \\ f_1 &= \frac{F'(0)}{1} = (-(x^2 + x - 1)^{-1})'|_{x=0} = (x^2 + x - 1)^{-2}(2x + 1)|_{x=0} = 1 \\ &\cdots \text{ y en general} \\ f_n &= \frac{F^{(n)}(0)}{n!}. \end{aligned}$$

Después de una pequeña manipulación algebraica de la ecuación (4) podemos obtener también la siguiente fórmula para $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) x^n.$$

Que a su vez nos da una nueva fórmula cerrada para f_n :

$$(5) \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Afirmamos aquí que probablemente estaremos más dispuestos a aceptar la fórmula (5) que la fórmula (1) como una buena respuesta para nuestro problema. Esto ya que a pesar de la aparente dificultad de la nueva formula por involucrar números irracionales, en efecto esta fórmula puede ser evaluada mucho más rápido computacionalmente que con la fórmula de recurrencia (2).

La fórmula (5) también nos da información asintótica sobre de f_n , eso es, como f_n se comporta cuando n es muy grande ($n \rightarrow \infty$). Como $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$, tenemos que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces sabemos que $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$ cuando n es grande. Por ejemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Así que la razón $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ de dos números de Fibonacci consecutivos es muy cercana a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cuando n es grande. Este número es conocido como la razón de oro y aparece en numerosas ocasiones en la naturaleza.

1.4. Conclusiones. Entonces ¿qué es una “buena” fórmula de conteo? y ¿cuando sabemos que hemos determinado la cardinalidad de una familia de conjuntos?. No hay realmente una buena respuesta para ésta pregunta. Dependiendo del aspecto que estemos interesados en entender de nuestra familia estaremos más inclinados a aceptar una respuesta sobre otras. Por ejemplo tener biyecciones hacia una familia conocida normalmente se acepta como una muy buena respuesta para determinar la cardinalidad de una familia que estemos estudiando.

Ejemplo 1.6. ¿Cuál es el número g_n de sucesiones ordenadas con entradas 1 y 2 cuya suma sea igual a n ?. Por ejemplo la sucesión (1, 1, 2, 1, 2, 2, 1) tiene suma $1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 10$. Para esta nueva familia de objetos podemos definir una biyección entre sucesiones que sumen a n y teselaciones en F_n . Un ejemplo de esta biyeccion está en la Figura 5.

Así que la respuesta

$$s_n = f_n \text{ “el } n\text{-ésimo número de Fibonacci”}$$

seguramente puede ser bastante satisfactoria después de toda la discusión que tuvimos en esta sección.

2. PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO

Los métodos de conteo estan basados en dos principios básicos: el principio de la multiplicación y el principio de la adición. Aprenderemos entonces a combinar correctamente éstos dos principios para determinar la cardinalidad de diferentes familias de objetos.

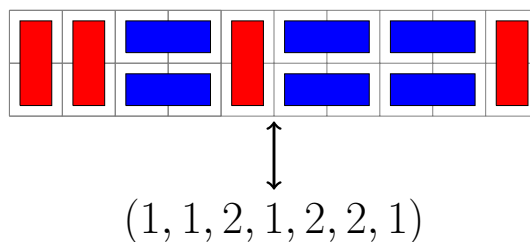


FIGURA 5. Ejemplo de la biyección

2.1. Principio de la multiplicación. Supongamos que hay un objeto que puede ser construido mediante un proceso que tiene k diferentes pasos, y en donde hay α_i diferentes resultados en el paso i independiente de lo que suceda en cualquiera de los otros pasos. Entonces el número de posibles resultados de todo el proceso, es decir, el número de objetos que pueden ser realizados es $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k$.

Ejemplo 2.1. Una tienda ofrece 8 estilos de pantalones. Para cada estilo hay 12 diferentes tallas de cintura, 5 longitudes de pantalones y 4 diferentes colores. ¿Cuántos pantalones diferentes se pueden comprar en ésta tienda?

Para responder ésta pregunta debemos pensar que podemos construir uno de tales pantalones primero seleccionando el estilo de alguna de las 8 maneras diferentes, luego escogiendo la talla de la cintura de 12 maneras, luego la longitud de 5 maneras y finalmente el color de 4 maneras posibles. Usando el principio de la multiplicación tenemos entonces

$$\frac{8}{\text{estilo}} \cdot \frac{12}{\text{cintura}} \cdot \frac{5}{\text{longitud}} \cdot \frac{4}{\text{color}} = 1920$$

diferentes variedades de pantalón.

Ejemplo 2.2. En un experimento debemos lanzar una moneda 3 veces consecutivas y en cada lanzada guardar un registro de si lo que observamos fue una cara C o un sello S . ¿Cuántos son los posibles resultados del experimento?

Una salida del experimento se construye arrojando la moneda en 3 veces consecutivas y en cada uno de estos pasos hay 2 posibles resultados. El principio de la multiplicación nos dice que tenemos

$$\frac{2}{\text{primero}} \cdot \frac{2}{\text{segundo}} \cdot \frac{2}{\text{tercero}} = 2^3 = 8$$

posibles resultados. Estos son CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS.

2.2. Principio de la suma. Supongamos ahora que hay un objeto que puede ser elegido entre k diferentes conjuntos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_k . Luego el número posible de maneras de seleccionar este objeto es:

$$\left| \bigsqcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Ejemplo 2.3. De los experimentos en el Ejemplo 2.2, ¿cuántos de estos tienen al menos una cara?. Podemos separar los experimentos que tienen al menos una cara en tres tipos. Sea A_1 el conjunto de experimentos en donde la primera lanzada fué una cara. O sea los experimentos son de la forma $C - -$, en donde $-$ puede ser C

ó S . Sea luego A_2 el conjunto de experimentos de la forma $SC -$ y A_3 el conjunto con solo el experimento SSC . El lector puede verificar que los experimentos que tienen al menos una cara pertenecen exáctamente a una de las categorías A_1 , A_2 ó A_3 . Usando el principio de la multiplicación podemos determinar que $|A_1| = 4$ y es directo el hecho de que $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 1$. Entonces, usando el principio de adición, sabemos que el número de experimentos deseados es:

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| = 4 + 2 + 1 = 7.$$

Observación 2.4. Hay algunas otras maneras de contar experimentos con al menos una cara de el ejemplo anterior. Por ejemplo podríamos decir también que el número experimentos con al menos una cara lo podemos obtener descontando del total de experimentos, que es 8, el número de experimentos en los que no ocurren caras, que es 1 (SSS). Entonces tenemos $8 - 1 = 7$ de ellos. Este tipo de razonamiento conocido como inclusión-exclusión lo desarrollaremos unas secciones más adelante.

Una **permutación** de un conjunto finito A es un arreglo ordenado de los elementos de A . Denotaremos \mathfrak{S}_A al conjunto de permutaciones de A .

Ejemplo 2.5. Las permutaciones del conjunto $\{a, b, c\}$ son abc, acb, bac, bca, cab y cba .

Ejemplo 2.6. Denotaremos para un entero positivo n , el conjunto $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Denotaremos también $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{[n]}$. Los elementos en \mathfrak{S}_3 son 123, 132, 213, 231, 312 y 321.

Teorema 2.7. *El número de permutaciones de un conjunto con n elementos es*

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1,$$

en donde por convención $0! := 1$.

Demostración. Para construir una permutación podemos elegir de izquierda a derecha el primer elemento entre los n que tenemos disponibles. Luego elegimos el segundo entre las $n - 1$ opciones que nos quedan y así sucesivamente. Cómo el número de opciones en cada uno de los pasos es independiente de los elementos que hayamos elegido, el principio de la multiplicación implica que el número de permutaciones es $n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$. \square

Ejemplo 2.8. ¿Cuántos posibles rankings puede tener un torneo con 4 jugadores?. Cada ranking puede ser representado como una permutación del conjunto de participantes en donde el primer elemento es el jugador que quedó en primer lugar y así sucesivamente. Entonces hay $4! = 24$ posibles rankings para este torneo.

Ejemplo 2.9. ¿De cuántas maneras puedes organizar los libros de historia, ciencia y literatura en un estante, de manera que todos los libros del mismo tópico aparezcan juntos; y tenemos 5 libros de historia, 3 de ciencia y 2 de literatura?. Nuestro objeto en este caso son arreglos de libros en el estante. Para producir un arreglo de este tipo en el estante podemos primero decidir en que orden van los tópicos. Como esto es una permutación del conjunto $\{\text{historia, ciencia, literatura}\}$ tenemos $3!$ maneras de organizarlos. Luego podemos organizar los libros de historia en el lugar que le corresponde en $5!$ maneras, los de ciencia de $3!$ maneras y finalmente los de literatura en $2!$ maneras. En total tendremos entonces $3! \times 5! \times 3! \times 2!$ posibles arreglos del estante.

Observación 2.10. Si los elementos del conjunto A tienen un orden asociado. Por ejemplo $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ podemos pensar una permutación $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ como una biyección de $\sigma : A \rightarrow A$ tal que $\sigma(x_i) = \sigma_i$. Esto nos da una segunda definición de lo que es una permutación. Podemos pensar en permutaciones como arreglos lineales de A o como biyecciones de A según sea el caso.

Una **permutación parcial** de un conjunto A es una permutación de un subconjunto de A . Llamaremos **k -permutaciones** a las permutaciones parciales con k letras.

Ejemplo 2.11. Las permutaciones parciales de $A = \{1, 2, 3\}$ son \emptyset con cero letras, $\{1, 2, 3\}$ con una letra, $\{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ con dos letras, y $\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ con tres letras.

Teorema 2.12. *El número de permutaciones parciales con k letras de un conjunto con n elementos es*

$$(n)_k := n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo 2.13. Un comité de 4 va a ser elegido entre 20 personas para tener los cargos de presidente, secretario, tesorero y personero. ¿Cuántos comités diferentes hay?

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \frac{20!}{16!} = 116280.$$

2.3. Subconjuntos. Supongamos que queremos escoger k miembros de un conjunto con n elementos sin considerar el orden en que hacemos ésta elección. Esto lo modelamos con el concepto de subconjunto. Un **k -subconjunto o k -combinación** de un conjunto A es un subconjunto $S \subseteq A$ tal que $|S| = k$. Denotaremos la familia de k -subconjuntos de A con el símbolo $\binom{A}{k}$ y su cardinalidad con el símbolo $\binom{|A|}{k}$. En particular, si $|A| = n$ leemos $\binom{n}{k}$ como “**n escoge k**”.

Teorema 2.14. *Para $0 \leq k \leq n$ tenemos que*

$$(6) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración 1. En lugar de demostrar la ecuación (6) vamos a demostrar en su lugar la ecuación

$$(7) \quad k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

que es equivalente. Esto lo probaremos determinando la cardinalidad de cierto conjunto de dos maneras diferentes. Nótese que el lado derecho de la ecuación (7) cuenta el número de k -permutaciones de $[n]$ según el Teorema 2.12. Pero una k -permutación se puede construir también de la siguiente manera. Primero elegimos los k elementos de $[n]$ que aparecerán en la k -permutación en $\binom{n}{k}$ maneras y luego ordenamos estos elementos en una de las $k!$ posibles maneras. El principio de la multiplicación entonces implica que la cardinalidad del conjunto de k -permutaciones de $[n]$ está dada por la expresión del lado izquierdo de (7). \square

Demostración 2. Vamos a determinar aquí la cardinalidad del conjunto de subconjuntos de tamaño k de $[n]$ en donde un elemento ha sido resaltado. Una manera de

contar el número de objetos de este conjunto se hace primero eligiendo el subconjunto de tamaño k en una de las $\binom{n}{k}$ maneras posibles y luego elegimos el elemento resaltado, para el que tenemos k opciones. Otra manera de contar este número de objetos se hace primero eligiendo el elemento resaltado entre los n posibles y luego completando el resto de los otros $k - 1$ elementos en $\binom{n-1}{k-1}$ maneras. Tenemos entonces la ecuación

$$\binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1}$$

que podemos reescribir como

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Con esta fórmula recursiva podemos proceder ahora haciendo inducción en la suma $(n+k)$. Si $n+k=0$ tenemos que $n=0$, $k=0$ y

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1.$$

Si tenemos que $n+k=r$ y asumimos que la afirmación es cierta para todo $r' < r$ entonces $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ y tenemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Ejemplo 2.15 (Juego de lotería). En un juego de lotería un jugador selecciona 5 números de un conjunto de 59 pelotas blancas y un número entre 35 pelotas rojas. ¿Cuántas posibles boletas de lotería hay?

$$\binom{59}{5} \cdot \binom{31}{1} = \frac{59!}{5!54!} \cdot \frac{35!}{1!34!} = 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 35 = 175223510$$

¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane ésta lotería?

$$\frac{1}{175223510} = 0,00000000570699674 \approx 0,0000006 \%$$

Juegos que le aciertan a al menos 3 pelotas blancas o a la pelota roja ganan premios.

¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio?.

El número de maneras posibles de ganar esta dado por

$$\begin{aligned} \# \text{ maneras posibles de ganar} &= \# \text{ maneras de ganar con la pelota roja} \\ &+ \# \text{ maneras de ganar sin la pelota roja} \\ &= \binom{59}{5} + \binom{34}{1} \left[\binom{5}{3} \binom{54}{2} + \binom{5}{4} \binom{54}{1} + \binom{5}{5} \binom{54}{0} \right] \\ &= 5502140. \end{aligned}$$

También podríamos calcularlo como

$$\begin{aligned} \# \text{ maneras posibles de ganar} &= \# \text{ total de tiquetes} - \# \text{ maneras posibles de no ganar} \\ &= 175223510 - \binom{34}{1} \left[\binom{54}{5} + \binom{54}{4} \binom{5}{1} + \binom{54}{3} \binom{5}{2} \right] \\ &= 5502140. \end{aligned}$$

La probabilidad de ganar algún premio de la lotería es entonces

$$\frac{5502140}{175223510} = 0,031401 \approx 3,14\%.$$

Ejemplo 2.16 (Sucesiones binarias). Una sucesión binaria de longitud n es una palabra $w_1w_2 \cdots w_n$, en donde $w_i \in \{0, 1\}$.

1. ¿Cuántas sucesiones binarias de longitud n hay?
2. ¿Cuántas de longitud 12 tienen seis 0's?
3. ¿Cuántas tienen un mayor número de 0's que de 1's?

Para responder la pregunta (1) nótese que una sucesión binaria la podemos construir eligiendo independientemente cada w_i entre $\{0, 1\}$. O sea tenemos dos opciones para cada w_i . El principio de la multiplicación nos dice entonces que hay i)

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$$

de éstos objetos.

Para la pregunta (2) podemos construir éstas palabras escogiendo las 6 posiciones para los 0's entre las 12 posiciones posibles de

$$\binom{12}{6} = 924$$

maneras y poniendo los 1's en las posiciones restantes.

Para responder la pregunta (3) nótese que el número de sucesiones binarias que tienen mas 0's que 1's es el mismo número de las que tienen más 1's que 0's (Esto lo vemos intercambiando el rol de los 0's y 1's). Éste número es

$$\begin{aligned} \# \text{ sucesiones con más 0's que 1's} &= \frac{1}{2} \# \text{ sucesiones con diferente \# de 0's y 1's} \\ &= \frac{1}{2} (\# \text{ total de sucesiones} - \# \text{ sucesiones con igual \# de 0's y 1's}) \\ &= \frac{1}{2} \left(2^{12} - \binom{12}{6} \right) = 1586. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.17. Denotemos $2^A := \{S \subseteq A\}$ al conjunto potencia de un conjunto A y $\{0, 1\}^n$ al conjunto de sucesiones binarias de longitud n . Encuentre una biyección $f : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}^n$ y con esto concluya que

$$|2^{[n]}| = 2^n.$$

Por esto lo sugestiva de la notación.

Teorema 2.18. Para todo $0 \leq k \leq n$ tenemos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demostración 1. Usando el Teorem 2.14 tenemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

Demostración 2. Para escojer un k -subconjunto A de $[n]$ podemos elegir los k elementos de A de $\binom{n}{k}$ maneras. También podríamos elegir los $n - k$ elementos de $[n] \setminus A$ en $\binom{n}{n-k}$ maneras. □

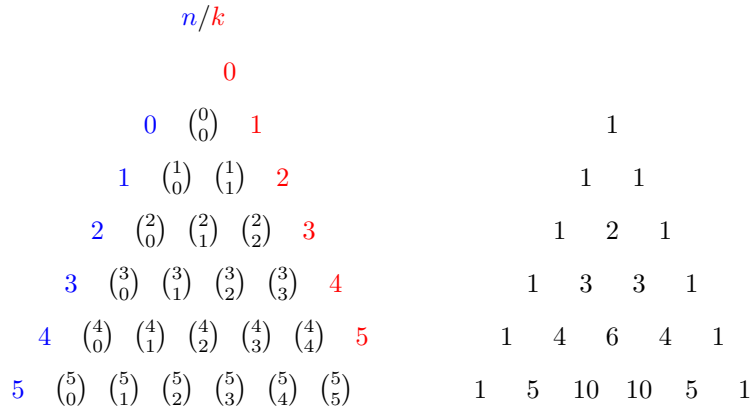


FIGURA 6. Triangulo de Pascal

Los números $\binom{n}{k}$ satisfacen la siguiente fórmula recursiva.

Teorema 2.19. Para todo $1 \leq k \leq n - 1$ tenemos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

con $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para todo $n \geq 0$.

Demostración 1. Podemos hacer una partición de $\binom{[n]}{k}$ en dos partes

$$\begin{aligned} \binom{[n]}{k} &= \{S \subseteq [n] \mid |S| = k\} \\ &= \{S \subseteq [n] \mid |S| = k, n \notin S\} \sqcup \{S \subseteq [n] \mid |S| = k, n \in S\} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

□

Demostración 2. Usando el Teorema 2.14 tenemos

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{n-1-k} &= (n-1)! \left(\frac{1}{k!(n-1-k)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} (n-k+k). \end{aligned}$$

□

2.4. Teorema del Binomio. Usando el Teorema 2.19 vemos en la Figura 6 que los números $\binom{n}{k}$ se pueden organizar en un triangulo de números en donde cada entrada se obtiene mediante la suma de las dos entradas inmediatamente arriba. Éste triangulo se le atribuye al matemático Blase Pacal (1623-1662) que los estudió gracias a que estos mismos números aparecen como coeficientes en la expansión de la potencia binomial $(1+x)^n$.

Ejemplo 2.20. Las expansiones binomiales para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ son:

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1 \\ (1+x)^1 &= 1+x \\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.\end{aligned}$$

Observación 2.21. Los números $\binom{n}{k}$ son también conocidos como coeficientes binomiales o números binomiales.

Teorema 2.22 (Teorema del binomio). *Tenemos que*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k.\end{aligned}$$

Demostración. Observemos que

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y),$$

en donde hay n factores en el lado derecho de la igualdad.

¿Cuál es entonces el coeficiente de y^kx^{n-k} ? Es el número de veces que y^kx^{n-k} aparece en la expresión $(x+y)^n$. Para construir este monomio podemos elegir los k factores en donde elegiremos la variable y en $\binom{n}{k}$ maneras y luego tomamos la variable x en los factores restantes. \square

Podemos usar el Teorema 2.22 para probar interesantes identidades combinatorias.

Teorema 2.23. *Para $n \geq 0$,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demostración 1. Usamos el Teorema 2.22 con $y = x = 1$. \square

Sin embargo ésta identidad combinatoria es lo suficientemente sugestiva desde el punto de vista enumerativo conduciendonos también a la siguiente demostración combinatoria.

Demostración 2. ¿Qué familia combinatoria estamos enumerando con el número 2^n ? Este es el número de subconjuntos de $[n]$ y tenemos que

$$\begin{aligned}2^{[n]} &= \{A \subseteq [n]\} \\ &= \bigsqcup \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\} \\ &= \bigsqcup \binom{[n]}{k}.\end{aligned}$$

La demostración termina usando el principio de la adición. \square

Teorema 2.24. Para $n \geq 0$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Demostración. Usamos el Teorema 2.22 con $x = 1$ y $y = -1$. □

Observación 2.25. ¿Se podrá producir una prueba combinatoria del Teorema 2.24? La aparición de signos nos sugiere que probablemente no. Sin embargo aprenderemos más adelante una técnica combinatoria que tiene en cuenta este tipo de cancelaciones por signos (principio de inclusión-exclusión).

Teorema 2.26. Para $m, n \geq 0$ tenemos

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

Demostración 1. Nótese que en el lado derecho de la ecuación estamos contando $m+1$ -subconjuntos de $[m+n+1]$. Sea

$$A_r = \{B \subseteq [m+n+1] \mid \text{máx } B = r+1 \text{ y } |B| = m+1\}.$$

Entonces tenemos que $|A_r| = \binom{r}{m}$ ya que los otros m elementos en A_r que son menores que $r+1$ los escogemos entre los elementos de $[r]$. Para que el conjunto A_r no sea vacío tenemos que $m \leq r \leq m+n$, lo que implica que

$$\binom{[m+n+1]}{m+1} = A_m \sqcup A_{m+1} \sqcup \cdots \sqcup A_{m+n},$$

y a su vez el enunciado del teorema cuando usamos el principio de la adición. □

Demostración 2. Por inducción en n . El enunciado se satisface cuando $n = 0$ ya que $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$. Si $n > 0$ tenemos por el Teorema 2.19 que

$$\binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n}{m} + \binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m}{m}.$$
□

Teorema 2.27. Para $n \geq 0$,

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= (1+x)^n (1+x)^n \\ \left(\sum_{r=0}^{2n} \binom{2n}{r} x^r \right) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m \right) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{2n} \sum_{\substack{k+m=r \\ 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq m \leq n}} \binom{n}{k} \binom{n}{m} x^r \right) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{r-k} x^r \right). \end{aligned}$$

Como esto es una igualdad de polinomios, los coeficientes son iguales uno a uno. Extrayendo el coeficiente de x^n ($r = n$) en el lado izquierdo de la igualdad obtenemos $\binom{2n}{n}$ y en el lado derecho obtenemos $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ luego de una aplicación del Teorema 2.18.

Una manera menos compacta pero más visual de expresar todo este proceso sería considerando que

$$(1+x)^n(1+x)^n = \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n \right) \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n \right)$$

y observando que el coeficiente de x^n en esta expresión es

$$\binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} \binom{n}{0}.$$

□

Ejemplo 2.28. Para $n = 4$ tenemos

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = \binom{8}{4} = 70.$$

Teorema 2.29. Para $n \geq 0$ tenemos

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} (1-x^2)^n &= (1-x)^n \cdot (1+x)^n \\ \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{2r} (-1)^r \right) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m \right) \\ &= \sum_{r=0}^{2n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{r-k} x^r. \end{aligned}$$

Extrayendo el coeficiente de x^n a ambos lados obtenemos el resultado. □

Ejemplo 2.30. Cuando $n = 2$ se tiene

$$\binom{2}{0}^2 - \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = 1 - 4 + 1 = -2 = (-1)^1 \binom{2}{1},$$

y cuando $n = 3$ tenemos

$$\binom{3}{0}^2 - \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 - \binom{3}{3}^2 = 0.$$

3. SELECCIONES CON REPETICIONES Y COMPOSICIONES

Una **Composición** α de un número n es una sucesión de enteros positivos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ tal que $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$.

Ejemplo 3.1. $\alpha = (1, 3, 2, 2, 1, 2)$ es una composición de 11.

La **longitud** de una composición es el número $\ell(\alpha)$ de elementos en α . En el ejemplo tenemos una composición de longitud 6. Una composición de longitud k a veces se conoce como una **k -composición**.

Teorema 3.2. *El número de k -composiciones de n es $\binom{n-1}{k-1}$.*

Demostración 1. Podemos utilizar el siguiente modelo para describir una k -composición $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Podemos pensar en α como una sucesión de n “unos” (1) y entre cada par de unos existe ó un “más” (+) ó una “coma” (.). Los más representan los números a sumar y las comas representan el comienzo de un nuevo bloque. Por ejemplo, para $n = 7$ y $k = 3$, la representación de la composición (3, 2, 2) esta dada por

$$1 + 1 + 1, 1 + 1, 1 + 1.$$

Para construir entonces una k -composición de n tenemos $n - 1$ posiciones en los espacios entre los unos en donde tenemos que ubicar $k - 1$ comas y $n - k$ más. Lo que implica el resultado. \square

Demostración 2. La cantidad $\binom{n-1}{k-1}$ sugiere que existe una biyección entre el conjunto $\binom{[n-1]}{k-1}$ de $(k - 1)$ -subconjuntos de $[n - 1]$ y el conjunto $\text{comp}_{n,k}$ de k -composiciones de n .

En efecto, sea $\phi : \text{comp}_{n,k} \rightarrow \binom{[n-1]}{k-1}$ definida por

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \mapsto \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}\}.$$

Por ejemplo $(1, 3, 2, 2, 1, 2) \in \text{comp}_{11,6} \mapsto \{1, 4, 6, 8, 9\} \in \binom{[10]}{5}$.

¿Es esta una función biyectiva?. Sí es así, ¿cuál es su inversa?. Vamos a mostrar que existe una función $\gamma : \binom{[n-1]}{k-1} \mapsto \text{comp}_{n,k}$ tal que $\gamma \circ \phi = id$ y $\phi \circ \gamma = id$, lo que quiere decir que ϕ y γ son inversas una de la otra.

En efecto, sea $\gamma : \binom{[n-1]}{k-1} \mapsto \text{comp}_{n,k}$ definida por

$$\{s_1 < s_2 < \dots < s_{k-1}\} \mapsto (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_{k-1} - s_{k-2}, n - s_{k-1}).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \phi \circ \gamma(s) &= \phi(s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_{k-1} - s_{k-2}, n - s_{k-1}) \\ &= \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k-1}\} = s \\ \gamma \circ \phi(\alpha) &= \gamma(\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}\}) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{k-1}) = \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

Ejemplo 3.3. ¿Cuántas posibles soluciones hay, en los enteros positivos, para la ecuación $x + y + z = 17$?

Lo que se nos pide es encontrar el número de 2-composiciones de 17. Por el Teorema 3.2 tenemos que este número es $\binom{17-1}{3-1} = \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$.

Una **k -composición débil** de n es una sucesión de enteros no negativos $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ como $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$. Nótese que los μ_i ahora pueden ser 0.

Ejemplo 3.4. La sucesión (2, 0, 4, 1) es una 4-composición débil de 7 ya que $2 + 0 + 4 + 1 = 7$.

Ejemplo 3.5. ¿Cuántas soluciones hay en los enteros no negativos para la ecuación $x + y + z = 17$?

Nótese que podemos realizar el cambio de variables $x' = x + 1$, $y' = y + 1$ y $z' = z + 1$. Obtenemos entonces la ecuación $x' + y' + z' = 20$ en donde $x' > 0$, $y' > 0$ y $z' > 0$. Adicionalmente cada solución de la forma (x', y', z') corresponde de manera biyectiva con una solución (x, y, z) usando las ecuaciones del cambio de

variables. Gracias al Teorema 3.2 sabemos que tenemos $\binom{20-1}{3-1} = \binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2 \cdot 1} = 171$ de estas soluciones.

Teorema 3.6. *El número de k -composiciones débiles de n es $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$*

Demostración 1. Existe una biyección $wcomp_{n,k} \rightarrow comp_{n+k,k}$ dada por

$$(\mu_1, \dots, \mu_k) \mapsto (\mu_1 + 1, \dots, \mu_k + 1),$$

que está bien definida ya que

$$(\mu_1 + 1) + \dots + (\mu_k + 1) = n + k. \quad \square$$

Demostración 2. Una k -composición débil de n puede ser representada como una sucesión de n puntos y $k-1$ barras. Por ejemplo $\mu = (2, 1, 0, 0, 2, 0, 3) \in wcomp_{8,7}$ corresponde a la sucesión $\bullet \bullet | \bullet | | | \bullet \bullet | \bullet$.

Para construir este tipo de arreglos tenemos $n+k-1$ posiciones de donde debemos elegir las $k-1$ posiciones en donde ubicaremos las barras. Esto lo podemos hacer de $\binom{n+k-1}{k-1}$ maneras. Luego ocupamos los espacios restantes con puntos. \square

Ejemplo 3.7. ¿Cuántas sucesiones binarias hay con exactamente p ceros y q unos en donde los ceros no pueden aparecer de manera consecutiva?

Un ejemplo de uno de estos objetos cuando $p = 5$ y $q = 8$ es 0110101010111.

Podemos construir una de estas sucesiones ubicando los ceros primero y alocando x_i unos entre los ceros en posiciones i e $i+1$, en donde x_0 es el número de unos al principio de la sucesión y x_p el número de unos al final.

Entonces tenemos que el número de estas alocaiones de unos corresponde al número de soluciones de la ecuación

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_p = q,$$

en donde $x_0 \geq 0$, $x_p \geq 0$ y $x_i > 0$ para $i = 1, \dots, p-1$.

Haciendo los cambios de variables $x'_1 = x_1 + 1$ y $x'_p = x_p + 1$ tenemos que el número de las soluciones deseadas es el mismo número de soluciones de la ecuación

$$x'_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} + x'_p = q + 2$$

en enteros positivos. Gracias al Teorema 3.2 sabemos que hay $\binom{q+1}{p}$ de ellas.

Un **multiconjunto** es una colección de elementos en donde las repeticiones son permitidas.

Ejemplo 3.8. $\{1, 2, 2, 4, 7, 7, 7\}$ es un multiconjunto con los elementos del conjunto $[10]$.

Ejemplo 3.9. ¿Cuántos multiconjuntos hay con los elementos del conjunto $[3]$?

Todos los siguientes son multiconjuntos válidos

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 3\}, \{1, 2, 3, 3, 3\}, \dots,$$

así que hay infinitos de ellos.

¿Cuántos de estos multiconjuntos tienen exactamente dos elementos?

Seis de ellos que son

$$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 2\}.$$

Llamaremos **k -multiconjuntos** de $[n]$ a los multiconjuntos con k elementos. Denotaremos $\left(\binom{[n]}{k}\right)$ al conjunto de k -multiconjuntos de $[n]$ y $\binom{n}{k}$ su cardinalidad, la cual llamamos “ n multiescoge k ”.

Teorema 3.10. *Para $n \geq 1$ y $k \geq 0$ tenemos que*

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Demostración 1. Sea μ_i el número de veces que aparece el elemento $i \in [n]$ en el k -multiconjunto. Entonces tenemos que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ es una composición débil de k . Aplicando el Teorema 3.6 concluimos el resultado. \square

Ejemplo 3.11. Para $n = 3$ y $k = 2$ tenemos que $\left(\binom{[3]}{2}\right) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$, lo que confirma nuestra enumeración manual anterior.

Vamos a dar una segunda prueba del Teorema 3.10. Para esto primero nótese que usando la misma estrategia con la que demostramos el teorema del binomio podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.12. *Tenemos que*

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$$

Adicionalmente podemos extender la definición de los coeficientes binomiales para cualquier $z \in \mathbb{C}$ usando la expresión

$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1) \cdots (z-k+1)}{k!}.$$

Teorema 3.13. *Para $n \geq 0$ y $k \geq 0$ tenemos*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1) \cdots (-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(n)(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

\square

Demostración 2 Teorema 3.10.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k &= (1 + x + x^2 + \dots)^n \\
 &= (1 - x)^{-n} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} (-x)^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-x)^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k. \quad \square
 \end{aligned}$$

Una k -**multipermutación** es un arreglo ordenado con k -elementos de los elementos de un multiconjunto.

Ejemplo 3.14. ¿Cuántas 2-multipermutaciones hay con los elementos de [3]? En total nueve que son 11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32.

Teorema 3.15. Hay n^k k -multipermutaciones con elementos del conjunto $[n]$

Demostración. Tenemos n opciones para cada una de las k posiciones. □

Ejemplo 3.16. Para $k = 2$ y $n = 3$ tenemos $3^2 = 9$ 2-multipermutaciones del conjunto [3].

Utilizando los resultados de esta sección podemos concluir con que el número de k -arreglos ordenados y no ordenados en donde se permiten repeticiones o no está dado en la siguiente tabla.

	ordenado	no ordenado
sin repeticiones	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
con repeticiones	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

4. UN TEOREMA DE INVERSIÓN MATRICIAL

Sea A_n la matriz de Pascal

$$A_n = \left[\binom{i}{j} \right]_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}.$$

Por ejemplo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es A_n una matriz invertible?. Si es así, ¿cuál es su inversa?. Podemos usar cualquiera de los métodos conocidos para calcular ésta inversa (regla de Cramer, fórmula por cofactores, eliminacion Gaussiana, etc.).

$$\begin{aligned}
A_3^{-1} &= \frac{1}{\det A_3} \operatorname{cof} A_3^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[(-1)^{i+j} \binom{i}{j} \right]_{\substack{0 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 3}}.
\end{aligned}$$

Esto es verdad en general. vamos a probarlo!

Lema 4.1. Para todo i, j, k con $j \leq k \leq i$

$$\binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}$$

Demostración. Nuestros objetos a contar son parejas ordenadas de conjuntos (S, T) donde $S \subseteq [i]$ con $|S| = k$ y $T \subseteq S$ con $|T| = j$. Por ejemplo si $i = 4$, $k = 3$ y $j = 2$ podemos tener $(\{1, 2, 4\}, \{1, 4\})$. Podemos enumerar estos objetos siguiendo dos estrategias diferentes, la primera es eligiendo el subconjunto S de $[i]$ de $\binom{i}{k}$ maneras posibles y luego el subconjunto T de S en $\binom{k}{j}$ maneras posibles; la segunda manera es eligiendo el subconjunto T de $[i]$ primero de $\binom{i}{j}$ maneras posibles y luego los elementos del conjunto $S \setminus T$ en $\binom{i-j}{k-j}$ maneras. \square

Lema 4.2. Para todo $j < i$ tenemos que

$$\sum_{j \leq k \leq i} \binom{i}{k} \binom{k}{j} (-1)^k = 0.$$

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \leq k \leq i} \binom{i}{k} \binom{k}{j} (-1)^k &= \sum_{j \leq k \leq i} \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j} (-1)^k \\
&= (-1)^j \binom{i}{j} \left(\sum_{0 \leq k-j \leq i-j} \binom{i-j}{k-j} (-1)^{k-j} \right) \\
&= (-1)^j \binom{i}{j} = (1-1)^{i-j} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 4.3. Sea A_n la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ con filas y columnas etiquetadas por $0, 1, \dots, n$ y definida por $(A_n)_{ij} = \binom{i}{j}$ y sea B_n la matriz $(n+1) \times (n+1)$ definida por $(B_n)_{ij} = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$. Tenemos que $B_n A_n = I_n$ (y $A_n B_n = I_n$), en donde I_n es la matriz identidad de tamaño $(n+1) \times (n+1)$.

Demostración. Recordemos que al multiplicar matrices $[b_{ij}][a_{ij}] = [c_{ij}]$ tenemos que $c_{ij} = \sum_k b_{ik}a_{kj}$. Entonces

$$\begin{aligned} (B_n A_n)_{ij} &= \sum_{k=0}^n (B_n)_{ik} (A_n)_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} \binom{i}{k} \binom{k}{j} \\ &= (-1)^i \sum_{k=j}^i (-1)^k \binom{i}{k} \binom{k}{j} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \text{ por el Lema 4.2} \\ 0 & \text{si } j > i \text{ dado que } \binom{i}{k} \text{ ó } \binom{k}{j} \text{ es cero} \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

¿Cómo podemos usar este resultado? Supongamos que hay dos sucesiones (a_0, a_1, a_2, \dots) y (b_0, b_1, \dots) que están relacionadas para todo $n \geq 0$ por la fórmula

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k.$$

En notación matricial tenemos entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{a} &= A_n \mathbf{b} \\ B_n \mathbf{a} &= B_n A_n \mathbf{b} \\ B_n \mathbf{a} &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

O sea que:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+0} \binom{n}{0} \\ (-1)^{n+1} \binom{n}{1} \\ \vdots \\ (-1)^{n+n} \binom{n}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, para todo $n \geq 0$, tenemos que

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} a_k.$$

Teorema 4.4 (Inversion binomial). *Para sucesiones (a_0, a_1, a_2, \dots) y (b_0, b_1, \dots) las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$ para todo $n \geq 0$.
- $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} a_k$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 4.5. Un **desarreglo** de $[n]$ es una permutación sin puntos fijos (un punto fijo en una permutación σ es un valor $i \in [n]$ talque $\sigma_i = i$). Por ejemplo cuando $n = 4$, la permutación 3214 tiene puntos fijos 2 y 4, pero 3142 no tiene puntos fijos, osea que es un desarreglo.

Queremos encontrar una fórmula para el número de desarreglos de $[n]$. Para esto vamos a enumerar el conjunto \mathfrak{S}_n de permutaciones de n de dos maneras diferentes. Sabemos que hay $n!$ permutaciones. De otro lado observemos que en una permutación que tiene exactamente k puntos fijos, el resto de las otras $n - k$ letras forman un desarreglo. Entonces tenemos

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

Si consideramos $a_n = n!$ y $b_n = d_n$ podemos usar el teorema de inversión binomial para obtener que

$$d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k!.$$